EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O DOUTORADO
ELETROMAGNETISMO
Prof. Carlos Jacinto
_03/2019

Aluno: ____

Duração: 4 horas - Prova sem consulta

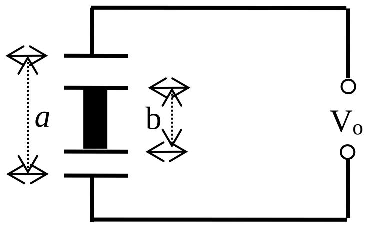
OBSERVAÇÃO: ESCOLHA UMA DAS QUATRO PRIMEIRAS QUESTÕES PARA ELIMINAR E MARQUE-A COM X; CADA QUESTÃO VALE 2,5 PONTOS

---

1. **a)** Um anel de raio R tem uma carga total +Q uniformemente distribuída sobre ele. Calcule o campo elétrico e potencial no centro do anel.
b) Considere uma carga -Q posicionada na linha perpendicular ao plano do anel e que passa pelo seu centro. Mostre que a carga executará movimento harmônico simples para pequenos deslocamentos perpendiculares ao plano do anel.

---

2. A figura mostra dois capacitores em série, com uma seção rígida no centro, de comprimento b, sendo movível verticalmente. A área de cada placa é A. Mostre que a capacitância da combinação em série é independente da seção rígida do centro. Se a diferença de voltagem entre as placas externas for mantida constante e igual a Vo, qual é a mudança na energia armazenada no capacitor se a seção do centro for removida?



---

3. Uma esfera dielétrica de raio *a* e constante dielétrica ε_1 é colocada em um líquido dielétrico de extensão infinita e constante dielétrica ε_2. Um campo elétrico uniforme $\vec{E} = E_o\hat{z}$ está presente nesse líquido. Encontre o campo elétrico resultante dentro e fora da esfera.

---

4. Considere uma esfera dielétrica classe A (ver nota de rodapé)[1] com permissividade elétrica relativa ε_r e raio *R*. A esfera está inicialmente descarregada e, então, coloca-se uma densidade de cargas livres uniforme ρ_f. Determine o potencial eletrostático no centro da esfera.

---

5. Um fio infinito de raio *a* carrega uma densidade de corrente uniforme $\mathbf{J} = J_0\hat{\mathbf{k}}$. Ele é circundado por uma casca cilíndrica concêntrica (também infinita) de material magnetizável com: raios *b* e *c* (c > *b*, *b*>*a*), susceptibilidade magnética χ_m e permeabilidade μ, ambas constantes. O material obedece uma relação linear entre o vetor indução magnética **B** e o vetor campo magnético **H.**

a) Calcule o fluxo por unidade de comprimento Φ', do vetor indução **B**, dentro da casca.
b) Ache as densidades de correntes equivalentes (correntes de magnetização).
c) Ache **B** a distâncias $\rho >$ c. Como este valor seria afetado se a casca cilindríca fosse removida?

---

[1] Um dielétrico Classe A é isotrópico, homogêneo e obedece uma relação linear $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}$ em que a permissividade elétrica relativa ε_r independe das coordenadas.

FORMULÁRIO
(Sistema Internacional de Unidades)

1. Vetor Indução Magnética **B,** Polarização **P**, Magnetização **M**, momento magnético **m**, Potencial Elétrico V, vetor deslocamento elétrico **D,** vetor campo elétrico **E**, densidade volumétrica de cargas de polarização ρ_b, densidade de cargas de polarização na superfície σ_b.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\left[\int_{\tau'} \frac{\left(\mathbf{J}_f + \nabla' \times \mathbf{M}\right)\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3} d\tau' + \int_{S'} \frac{\left(\boldsymbol{\lambda}_f + \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}'\right)\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3} da' + \int_C \frac{I\,d\mathbf{l}'\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}\right]$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int_\tau \mathbf{r}\times\mathbf{J}_f\, d\tau + \frac{1}{2}\int_S \mathbf{r}\times\boldsymbol{\lambda}_f\, da + \frac{1}{2}\oint_C I\mathbf{r}\times d\mathbf{l}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\int_{\tau'} \frac{\rho_f - \nabla'\cdot\mathbf{P}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} d\tau' + \int_{S'} \frac{\sigma_f + \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} da'\right]$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o\mathbf{E} + \mathbf{P}\,;\; \rho_b = -\nabla.\boldsymbol{P};\; \sigma_b = \boldsymbol{P}.\hat{\boldsymbol{r}}\big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}'$ é um vetor unitário normal ao elemento de área, I é a corrente elétrica num fio fino, $\mathbf{J}_f$ e $\boldsymbol{\lambda}_f$ são as densidades de corrente volumétrica e superficial devido às cargas livres, respectivamente, ρ_f e σ_f são as densidades de cargas livres volumétrica e superficial, respectivamente, $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}\; NA^{-2}$ é a permeabilidade do vácuo e ε_o é a permissividade do vácuo.

2. Potencial Vetor de um dipolo magnético **m e** Potencial Elétrico de um dipolo elétrico **p**

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

3. Integrais úteis com polinômios de Legendre de ordem n $P_n(x)$ e função delta de Cronecker $\delta_{nl} = \begin{cases} 1, \text{se } n = l \\ 0, \text{se } n \neq l \end{cases}$.

$$P_n\left(-x\right) = \left(-1\right)^n P_n\left(x\right)$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_l(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nl}$$

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} 1 \; se\; n = 0 \\ 0 \; se\; n = 2,4,6... \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{(n-2)!!}{(n+1)!!} \; se\; n = 1,3,5... \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} dx \frac{1-x^2}{\left(1+a^2-2ax\right)^{3/2}} = \frac{4}{3} \quad 0 \le a < 1$$

4. Relações úteis

$$\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{a}\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{a}\right) - \nabla^2\mathbf{a}$$

$$\nabla\times\left(f\,\mathbf{a}\right) = \nabla f\times\mathbf{a} + f\,\nabla\times\mathbf{a}$$

$$\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

5. Miscelâneas

5.1 Solução da eq. de Laplace em coordenadas Esféricas com independência azimutal

$$f\left(r,\theta\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)P_l\left(\cos\theta\right)$$

5.2 Solução da eq. de Laplace em coordenadas Cilíndricas no plano x - y

$$f\left(\rho,\varphi\right) = a_0 + b_0\ln\rho + \sum_{\substack{l=1\\ m=0}}^{\infty}\left(A_l\rho^l + B_l\rho^{-l}\right)\left(C_m e^{im\varphi} + D_m e^{-im\varphi}\right)$$

5.3 Capacitância de um capacitor de placas paralelas de área A, separadas por d: $C = \varepsilon_o A/d$

5.4 Energia armazenada por um capacitor: $W = CV_o^2/2$, V_o é a diferença de voltagem entre as placas.